Corrigé – 2024 Maths / juin

Questions de cours • propriétés : base orthonormale

$\vec{e_\rho}\cdot\vec{e_\varphi}=0 \qquad \vec{e_\rho}\cdot\vec{e_\rho}=1$

$\vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_z}=0 \qquad \vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_\varphi}=1$

$\vec{e_z}\cdot\vec{e_\rho}=0 \qquad \vec{e_z}\cdot\vec{e_z}=1$

• $\frac{z}{z'} \Rightarrow$ module $\frac{\rho}{\rho'}$; argument $(\theta-\theta')$

démonstration : $\frac{z}{z'}=\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}}=\frac{\rho}{\rho'}e^{i\theta}e^{-i\theta'}=\underbrace{\frac{\rho}{\rho'}}_{\text{module}}e^{\overbrace{i(\theta-\theta')}^{\text{argument}}}$.

• $\ln x$ définit sur R^{*+} où dérivable

• $\ln(0)=-\infty \quad \ln(1)=0$

• variation fct croissante $\quad \lim(x\to 0)=-\infty$ et $\lim(x\to+\infty)=+\infty$

• $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$ et $\ln(a)-\ln(b)=\ln(a/b)$

• TF $\quad a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$; $a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$; $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$

fct impaire $\Rightarrow b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt$; a_n nuls

Dérivation $\quad b(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \dot{b}(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

Utilisation de primitives connues $\quad A=\int_0^1\sqrt{3x}\,dx=\int_0^1(3x)^{1/2}dx=\left[\frac{2}{9}(3x)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Equation différentielle $\quad y''+2y'+5y=5\cos x$

SSSM : $\quad y''+2y'+5y=0 \Rightarrow r^2+2r+5=0$

$r=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=-1\pm 2i$

soit $y_{SSSM}=e^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))$

y_{SPE} recherchée de la forme $\alpha\cos x+\beta\sin x \Rightarrow$ réinjectée ds eq $\Rightarrow \alpha=1$ et $\beta=\frac{1}{2}$

soit $y_{SGE}=e^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))+\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

Equation différentielle / parachute (voir session 1)

1) RFD $\Rightarrow v'=-\frac{k}{m}v^2+g$ eq donnée OK

2) $\frac{v'}{v^2-\frac{mg}{k}}=-k/m$; poser $a^2=\frac{mg}{k}$, et $b=-\frac{k}{m}$

on aboutit à $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right|=bt+\text{cste}$ ou $v_{(t)}=a\frac{(1+Ce^{2abt})}{(1-Ce^{2abt})}$ avec $C=\frac{v(0)-a}{v(0)+a}$

et finalement :

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{\left(1+\frac{v(0)-\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v(0)+\sqrt{\frac{mg}{k}}}e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}\right)}{\left(1-\frac{\left(v(0)-\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}{v(0)+\sqrt{\frac{mg}{k}}}e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}\right)}$$